数理解析研究所講究録
540巻 1984年 60-79

直観主義論理の新しい模型

静岡大 理学部 古森雄一 (Yuichi Komori)

§1. Introduction.

直観主義論理や古典論理では、第一階述語論理の完全性定理の証明の中心部分は Henkin construction をするところである。Henkin construction では、与えられた論理式 α と theory T (theory とは論理式の集合で modus ponens に関して閉じていて、直観主義論理で証明できる論理式は全て含んでいるもの) に対して、$\alpha \notin T$ のとき、次の(1)(2)(3)を満たす theory T' を作っている。(1) $T \subset T'$ かつ $\alpha \notin T'$, (2) $\beta \vee \gamma \in T' \Rightarrow \beta \in T'$ または $\gamma \in T'$, (3) $\exists x \beta(x) \in T' \Rightarrow \exists a$: constant $\beta(a) \in T'$。しかし、直観主義論理から contraction rule を取り除いて得られる論理 L_{BCK} では Henkin 流の construction を行うことはできない。これは L_{BCK} では sequent $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ や $\alpha \vee \exists x \beta(x) \rightarrow \exists x (\alpha \vee \beta(x))$ が証明できないことと密接に関連している。そのために、L_{BCK} の完全性定理を得るためには、$\vee$ や $\exists$ の解釈を変えて、Henkin

流のconstructionをせずに証明が行えるようにしなければならない（命題論理については［3］と［4］を参照）。もちろん、そのようなことは、直観主義論理では必要のないことであるが、同じような考察により、直観主義論理の興味ある新しいモデルが得られる。そのモデルについての完全性定理はHenkin constructionを使わずに証明される。

§2. 新しいKripke frame.

まず新しいモデルを定義し、そのモデルに関する健全性（Soundness）定理を証明する。

定義2.1. $\langle M;\infty,\cap\rangle$ が <u>∞-distributive meet-semilattice</u> であるとは次の(1)(2)(3)を満たすこと；

(1) $\langle M;\cap\rangle$ は meet-semilattice である（$a\cap b=a$ を $a\leq b$ と書くことにする．$\leq$はM上の順序関係となる）。

(2) ∞はMからMへの写像で任意の $a,b\in M$ に対して、次の(i)〜(iii)をみたす；(i) $\infty(a)\leq b\Rightarrow b=\infty(b)$, (ii) $a\leq\infty(a)$, (iii) $\infty(a\cap b)=\infty(a)\cap\infty(b)$。

(3) $\langle M;\infty,\cap\rangle$ は ∞-distributive である。すなわち、任意の $a,b,c\in M$ に対して、$a\cap b\leq c$ のとき、$a'\cap b\leq c$ かつ $a'\geq a$ かつ $a'\geq c\cap\infty(a\cap b)$ となる a' が

Mの中に存在する。

$\mathbb{M}=\langle M;\infty,\cap,K,U\rangle$が Kripke frame であるとは、$\langle M;\infty,\cap\rangle$が$\infty$-distributive meet-semilattce であり、Mの部分集合Kが次の条件(4)を、Kからある集合の集合への写像Uが条件(5)(6)(7)をみたすことである。このとき、Kを$\mathbb{M}$（または$\langle M;\infty,\cap\rangle$）の frame subset，Uを$\mathbb{M}$（または$\langle M;\infty,\cap,K\rangle$）の universe function という。

(4) 任意の$a,b\in M$，任意の$c\in K$に対して、$a\cap b\le c$のとき、$a'\cap b\le c$ かつ $a'\ge a$ となる $a'\in K$ が存在する。

(5) 任意の$a\in K$に対して、$U(a)\neq\phi$ 。

(6) 任意の$a,b,c\in K$に対して、$a\cap b\le c$ ならば $U(a)\cap U(b)\subset U(c)$ である。

(7) 任意の$a,b,c\in K$に対して、$a\cap b\le c$ のとき、$a'\cap b\le c$ かつ $a'\ge a\cap\infty(b)$ かつ $U(a')\supset U(c)$ となる $a'\in K$ が存在する。

あるKripke frame $\mathbb{M}$（$=\langle M;\infty,\cap,K,U\rangle$）が与えられたものとする。$U(a)$の元$u$に対して$u$の名前を$\bar{u}$と書く（以後は、単に$u$と書く）。$\mathcal{L}$を関数記号やconstant記号を全く持たない第一階の直観主義述語論理の言語とする。$\mathcal{L}$に$U(a)$の元の名前をすべてconstantとしてつけ加えて得られる言語

を $\mathcal{L}(a)$ と書く。$\mathcal{L}(a)$ を $\mathcal{L}(a)$ の論理記号、論理式、constant、等々の集まりと考えることにする。すなわち、α が論理式のとき $\alpha \in \mathcal{L}(a)$ により、α は $\mathcal{L}(a)$ の論理式であることを表わしている。$\bigcup_{a \in K} \mathcal{L}(a)$ を $\mathcal{L}(M)$ とかく。$\mathcal{L}(M)$ の閉論理式全体の集合を $W(M)$(単に W とかくこともある)とかく。$W(M)$ の部分集合で閉素論理式(closed atomic formula)全体の集合を、$AW(M)$(又は単に、AW)とかく。さて、M の valuation $\models$ とは、K と $AW(M)$ との関係である。

定義 2.2. $\langle M, \models \rangle$ が Kripke model であるとは、M が Kripke frame で、$\models$ が $K \times AW$ の部分集合($(a, \alpha) \in \models$ を $a \models \alpha$ とかく)で次の条件(1)をみたすこと($\models$ を M(又は $\langle M, \models \rangle$)の valuation 又は forcing という)。

(1) 任意の $\alpha \in AW(M)$, 任意の $a, b, c \in K$ に対して、

(1-1) $a \models \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathcal{L}(a)$,

(1-2) $a = \infty(a)$ かつ $\alpha \in \mathcal{L}(a) \Rightarrow a \models \alpha$,

(1-3) $a \models \alpha$ かつ $b \models \alpha$ かつ $a \wedge b \leq c \Rightarrow c \models \alpha$。

M の valuation $\models$ を、任意の論理式にまで、論理式の構成に関する帰納法で次のように拡張する。

任意の $\alpha, \beta \in W(M)$ と任意の $a \in K$ に対して、

(2) $a \models \alpha \supset \beta \iff \forall b \in K \, (a \leq b$ かつ $b \models \alpha \Rightarrow b \models \beta)$ かつ $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$,

(3) $a \models \alpha \vee \beta \iff \exists b, c \in K\,(b \wedge c \leq a$ かつ $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$ かつ $\beta \in \mathcal{L}(b)$ かつ
$\alpha \in \mathcal{L}(c))$,

(4) $a \models \alpha \wedge \beta \iff a \models \alpha$ かつ $a \models \beta$,

(5) $a \models \neg \alpha \iff \forall b \in K\,(a \leq b$ かつ $b \models \alpha \Rightarrow b = \infty(b))$ かつ $\alpha \in \mathcal{L}(a)$,

(6) $a \models \forall x \alpha(x) \iff \forall b, c \in K\ \forall u \in U(b)\,(a \wedge c \leq b$ かつ $c = \infty(c)$ かつ
$\forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(c) \Rightarrow b \models \alpha(u))$ かつ $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(a)$,

(7) $a \models \exists x \alpha(x) \iff \exists A \Subset K\,[\wedge A \leq a$ かつ $\forall b \in A\, \exists u \in U(b)\,(b \models \alpha(u))]$。

ここに、$A \Subset K$ は'AはKの有限部分集合である'を表わす.

次に soundness 定理を証明するのであるが、残念ながら無条件では soundness 定理は成立しない。その条件をのべる前に無条件で成立する soundness 定理より弱い定理を証明する。

Γ を論理式の集合, γ を論理式とする。$\Gamma \to \gamma$ 又は $\Gamma \to$ という表現を sequent という。sequent $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \cup \Gamma \to (\gamma)$ ((γ) の意味は γ があってもなくてもよいことを表わしている)を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \Gamma \to (\gamma)$ ($\Gamma = \phi$ のときは $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \to (\gamma)$) とかく。$\Gamma \cup \{(\gamma)\} \subset W(M)$ のとき sequent $\Gamma \to (\gamma)$ は M の閉 sequent (混乱の恐れがないときは単に、閉 sequent) という。M の閉 sequent $\Gamma \to \gamma$ ($\Gamma \to$) が <u>Kripke model $\langle M, \models \rangle$ で正しい</u>とは、' $\forall a \in K\,[\forall \alpha \in \Gamma\,(a \models \alpha)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(a) \Rightarrow a \models \gamma$ '

(' $\forall a \in K\ \exists \alpha \in \Gamma\,(a \not\models \alpha)$')が成立していることとする。必ずしも閉でないsequentに対しては、そのsequentの自由変数にconstantを代入して得られるすべての$\mathbb{M}$の閉sequentが$\langle \mathbb{M}, \models \rangle$で正しいとき、それが<u>正しい</u>と定義する。推論規則Rが$\langle \mathbb{M}, \models \rangle$で<u>正しい</u>とは、推論規則の前提のsequentがすべて$\langle \mathbb{M}, \models \rangle$で正しいときは常に、結論のsequentが正しくなることを言う。

Gentzen の LJ (正確には$\Gamma \rightarrow \gamma$の$\Gamma$を論理式の列ではなくて集合とみなしているための本質的でない差がある)の公理や大部分の推論規則はどんなKripke modelでも正しいことが以下で示される。

補題2.3. 任意の$\alpha \in W(\mathbb{M})$, 任意の$a, b, c \in K$に対して、

(1) $a \models \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \mathscr{d}(a)$,

(2) $a = \infty(a)$ かつ $\alpha \in \mathscr{d}(a) \Longrightarrow a \models \alpha$,

(3) $a \models \alpha$ かつ $b \models \alpha$ かつ $a \wedge b \leq c \Longrightarrow c \models \alpha$。

<u>証明</u> すべて論理式の構成(degree)に関する帰納法で証明する。(1)(2)は簡単であるので略す。(3)を証明する。まず(1)と定義2.1(6)により$\alpha \in \mathscr{d}(c)$である。次に、$\alpha$の一番外側の論理記号により6通りの場合に分けられる。

(i) $\alpha = \beta \supset \gamma$ のとき.

$c \le d \in K$ かつ $d \models \beta$ とする。$a \wedge b \le d$ と定義 2.1(3)(4) により、$a' \wedge b \le d$, $a' \ge a$ かつ $a' \ge d \wedge \infty(a \wedge b)$ となる $a' \in K$ が存在する。もう一度定義 2.1(4) により、$a' \ge d \wedge e$ かつ $e = \infty(e) \ge \infty(a \wedge b)$ となる $e \in K$ が存在する。$\beta \in \mathcal{L}(e)$ とこの補題(2)により、$e \models \beta$ である。また $d \models \beta$ だから帰納法の仮定により、$a' \models \beta$ となる。$a' \ge a$ と $a \models \beta \supset \gamma$ と $a' \models \beta$ より $a' \models \gamma$ となる。同様に $a' \wedge b' \le d$ で $b' \models \gamma$ となる $b' \in K$ の存在がいえる。よって帰納法の仮定により $d \models \gamma$ となる。

(ii) $\alpha = \beta \vee \gamma$ のとき。

$a \models \beta \vee \gamma$ より $a_1 \wedge a_2 \le a$, $a_1 \models \beta$, $a_2 \models \gamma$, $\beta \in \mathcal{L}(a_2)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(a_1)$ となる $a_1, a_2 \in K$ が存在する。

$b \models \beta \vee \gamma$ より $b_1 \wedge b_2 \le b$, $b_1 \models \beta$, $b_2 \models \gamma$, $\beta \in \mathcal{L}(b_2)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(b_1)$ となる $b_1, b_2 \in K$ が存在する。

$c \ge a \wedge b \ge (a_1 \wedge b_1) \wedge (a_2 \wedge b_2)$ だから定義 2.1(4) により、$c \ge d \wedge e$, $d \ge a_1 \wedge b_1$ かつ $e \ge a_2 \wedge b_2$ となる $d, e \in K$ が存在する。帰納法の仮定により $d \models \beta$ かつ $e \models \gamma$ である。また $\beta \in \mathcal{L}(e)$ かつ $\gamma \in \mathcal{L}(d)$ だから $c \models \beta \vee \gamma$ となる。

(iii) $\alpha = \beta \wedge \gamma$ のとき。簡単である。

(iv) $\alpha = \neg \beta$ のとき。(i)と同様である。

(v) $\alpha = \forall x \beta(x)$ のとき。

$c \wedge e \le d \in K$, $e = \infty(e) \in K$, $u \in U(d)$ かつ $\forall x \beta(x) \in \mathcal{L}(e)$ とする。

$d \geq c \wedge e \geq (a \wedge e) \wedge (b \wedge e)$ と定義2.1(4)(7)により、$d \geq a' \wedge (b \wedge e)$, $U(a') \supset U(d)$ かつ $a' \geq a \wedge e \wedge \omega(b \wedge e) = a \wedge \omega(b \wedge e)$ となる $a' \in K$ が存在する。更に定義2.1(4)により、$a' \geq a \wedge a''$ かつ $a'' \geq \omega(b \wedge e)$ となる $a'' \in K$ が存在する。$a \models \forall x \beta(x)$, $u \in U(a')$ かつ $\forall x \beta(x) \in \mathcal{L}(a'')$ だから $a' \models \beta(u)$ となる。同様に、$d \geq a' \wedge b'$ かつ $b' \models \beta(u)$ となる $b' \in K$ の存在がいえる。帰納法の仮定により $d \models \beta(u)$ となる。

(vi) $\alpha = \exists x \beta(x)$ のとき。この場合のみ、帰納法の仮定を使わずに簡単に証明できる。　証明終

次の補題はSoundness定理の証明を見やすくする。それによると、a での $\models$ の計算（$\forall$, $\exists$ は除く）は、a よりuniverseが大きい K の元を眺めればよい。

補題2.4.　$a \models \alpha \vee \beta \iff \alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$ かつ $\exists b, c \in K$ ($b \wedge c \leq a$ かつ $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$ かつ $U(b) \cap U(c) = U(a)$)。

証明. $\Leftarrow$ は明らかである。$\Rightarrow$ を証明する。$a \models \alpha \vee \beta$ より、$b' \wedge c' \leq a$, $b' \models \alpha$, $c' \models \beta$, $\alpha \in \mathcal{L}(c')$, かつ $\beta \in \mathcal{L}(b')$ となる $b', c' \in K$ が存在する。定義2.1(7)により、$b \wedge c' \leq a$, $U(b) \supset U(a)$ かつ $b \geq b' \wedge \omega(c')$ となる $b \in K$ が存在する。補題2.3(2)(3)より、$b \models \alpha$ である。同様に、$b \wedge c \leq a$ かつ

$\mathcal{U}(c) \supset \mathcal{U}(a)$ かつ $c \models \beta$ となる $c \in K$ の存在がいえる。明らかに $\mathcal{U}(b) \cap \mathcal{U}(c) = \mathcal{U}(a)$ である。 証明終。

次の補題は Fitting の第5章の Lemma 2.2 と同様に証明できる。

補題2.5. $\alpha(u), \Gamma \to \delta$ ($\Gamma \to \alpha(u)$) が正しくなく、v が Γ にも δ にも現れない constant とすると、$\alpha(v), \Gamma \to \delta$ ($\Gamma \to \alpha(v)$) も正しくない。

定理2.6 (弱 Soundness 定理). Gentzen の LJ の公理及び $(\to \forall)$ と $(\exists \to)$ 以外の推論規則は任意の Kripke model で正しい。

証明. 公理については明らか。推論規則の結論が正しくないとして、前提のうちのどれか1つが正しくないことをいう。ここでは $(\vee \to)$, $(\to \vee)$, $(\supset \to)$, $(\to \supset)$, $(\forall \to)$ と $(\to \exists)$ の6つの場合だけ証明を与える。他の場合はより簡単である。

(i) $(\vee \to)$. 結論が正しくないとすると、ある Kripke model $\langle \mathcal{M}, \models \rangle$ ($\mathcal{M} = \langle M; \infty, \cap, K, \mathcal{U} \rangle$) と $a \in K$ が存在して、$a \models \alpha \vee \beta$, $\forall \gamma \in \Gamma\ (a \models \gamma)$, $a \not\models \delta$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(a)$ となっている。$a \models \alpha \vee \beta$ と補題2.4 により、$b \cap c \leq a$, $b \models \alpha$, $c \models \beta$ かつ

$U(b) \supset U(a)$, $U(c) \supset U(a)$ となる $b, c \in K$ が存在する。定義 2.1(3)(4) により、$b' \cap c' \leq a$, $b' \geq a \cap \infty(b \cap c)$, $b' \geq b$, $c' \geq a \cap \infty(b \cap c)$ かつ $c' \geq c$ となる $b', c' \in K$ が存在する。$a \not\models \delta$ と補題2.3(3) により $b' \not\models \delta$ 又は $c' \not\models \delta$ である。また、$\delta \in \mathcal{L}(b')$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(c')$ となっている。$b' \not\models \delta$ のときを考える。$b' \geq a \cap \infty(b \cap c)$ と定義 2.1(4) により、$b' \geq a \cap d$ かつ $d \geq \infty(b \cap c)$ となる $d \in K$ が存在する。$d = \infty(d)$ で $U(d) \supset U(a)$ なので $\forall \gamma \in \Gamma\ (d \models \gamma)$ である。よって、補題 2.3(3) により、$\forall \gamma \in \Gamma\ (b' \models \gamma)$ である。また $b' \geq b$ より $b' \models \alpha$ であるから、$\alpha, \Gamma \to \delta$ は $\langle M, \models \rangle$ で正しくない。$c' \not\models \delta$ のときは、$\beta, \Gamma \to \delta$ が正しくなくなる。

(ii) $(\to \vee)$. $\exists \langle M, \models \rangle\ \exists a \in K\ \ \forall \gamma \in \Gamma\ (a \models \gamma)$ かつ $a \not\models \alpha \vee \beta$ かつ $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$。$a \not\models \alpha \vee \beta$ より、$a \cap \infty(a) \leq a$ と $\beta \in \mathcal{L}(a)$ より、$a \not\models \alpha$ でなければならないことが分る。よって $\Gamma \to \alpha$ は正しくない。

(iii) $(\supset \to)$. $\exists \langle M, \models \rangle\ \exists a \in K\ \ a \models \alpha \supset \beta$, $\forall \gamma \in \Gamma\ (a \models \gamma)$, $\forall \varphi \in \Pi\ (a \models \varphi)$ かつ $a \not\models \delta$。$a \models \alpha \supset \beta$ より、$a \not\models \alpha$ 又は $a \models \beta$ である。$a \not\models \alpha$ のときは $\Gamma \to \alpha$ が正しくない。$a \models \beta$ のときは $\beta, \Pi \to \delta$ が正しくない。

(iv) $(\to \supset)$. $\exists \langle M, \models \rangle\ \exists a \in K\ \ \forall \gamma \in \Gamma\ (a \models \gamma)$ かつ $a \not\models \alpha \supset \beta$ かつ $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$。$a \not\models \alpha \supset \beta$ より、$b \geq a$, $b \models \alpha$

かつ $b \nvDash \beta$ となる $b \in K$ が存在する。$b \geq a$ と補題2.3(3)より、$\forall \gamma \in \Gamma\ (b \vDash \gamma)$ である。また、もちろん $\beta \in \mathcal{L}(b)$ なので $\alpha, \Gamma \to \beta$ は正しくない。

(v) $(\forall \to)$. $\exists \langle M, \vDash \rangle\ \exists a \in K\ \ a \vDash \forall x \alpha(x), \forall \gamma \in \Gamma\ (a \vDash \gamma), a \nvDash \delta$ かつ $\delta \in \mathcal{L}(a)$. $a \vDash \forall x \alpha(x)$ より、どんな $u \in U(a)$ をとっても、$a \vDash \alpha(u)$ である。よって u が Γ か δ に現れるときは、$u \in U(a)$ なので、$\alpha(u), \Gamma \to \delta$ は正しくない。u が Γ にも δ にも現れないときは、補題2.5により、やはり $\alpha(u), \Gamma \to \delta$ は正しくない。

(vi) $(\to \exists)$. $\exists \langle M, \vDash \rangle\ \exists a \in K\ \ \forall \gamma \in \Gamma\ (a \vDash \gamma),\ a \nvDash \exists x \alpha(x)$ かつ $\exists x \alpha(x) \in \mathcal{L}(a)$. $a \nvDash \exists x \alpha(x)$ より $\forall u \in U(a)\,(a \nvDash \alpha(u))$ となる。よって u が Γ に現れるときは $\Gamma \to \alpha(u)$ は正しくない。u が Γ に現れないときは補題2.5による。　証明終.

推論規則 $(\to \forall)$ と $(\exists \to)$ については、無条件では正しい推論規則とはならない。$(\to \forall)$ と $(\exists \to)$ が正しい推論規則になるように normal model の概念を定義する。

定義2.7. Kripke model $\langle M, \vDash \rangle$ $(M = \langle M; \infty, \cap, K, U \rangle)$ が次の2つの条件をみたすとき normal であるという。またこのときの $\vDash$ を normal valuation という。任意の x だけが

variable として現れる $\mathcal{L}(M)$ の論理式 $\alpha(x)$ と任意の $a, b, c \in K$ に対して．

$a \cap c \leq b$，$c = \wp(c)$，$\forall x\, \alpha(x) \in \mathcal{L}(c)$ かつ $u \in U(b)$ のとき、

(1) $\forall d \in K\ \forall v \in U(d)\,(a \leq d \Rightarrow d \models \alpha(v)) \Rightarrow b \models \alpha(u)$,

(2) $a \models \alpha(w) \Rightarrow \exists a' \in K\ \exists v \in U(a')\,(a' \geq a \cap c,\ a' \models \alpha(v),\ U(a') \supset U(b)$

かつ $a' \cap \wp(b) \leq b$)。

Remark. 集合 $\{\wp(b) \mid b \in M\}$ が singleton ならば model は常に normal になっている。

normal model については $\forall$ と $\exists$ についても補題 2.4 に対応する補題が成立する。

補題 2.8. Kripke model $\langle M, \models \rangle$ が normal のとき、任意の $a \in K$ に対して、

(1) $a \models \forall x\, \alpha(x) \Longleftrightarrow \forall b \in K\ \forall u \in U(b)\,(a \leq b \Rightarrow b \models \alpha(u))$,

(2) $a \models \exists x\, \alpha(x) \Longleftrightarrow \exists A \ll K\,[\cap A \leq a$ かつ $\forall b \in A\,\{U(a) \subset U(b)$ かつ

$\exists u \in U(b)\,(b \models \alpha(u))\}]$.

<u>証明.</u> (1). $\Rightarrow$ は normal でなくても成立し、明らか。$\Leftarrow$ を示す。まず、$\forall b \in K\ \forall u \in U(b)\,(a \leq b \Rightarrow b \models \alpha(u))$ において、$b = a$ とおいて $a \models \alpha(u)$ がでるので $\forall x\, \alpha(x) \in \mathcal{L}(a)$ で

ある。次に、$b \geq a \cap c$, $c = \infty(c)$, $\forall x \alpha(x) \in \mathcal{L}(c)$ かつ $u \in U(b)$ とする。このとき、定義 2.7 (1) により、$b \models \alpha(u)$ となる。

(2). $\Leftarrow$ は明らかである。$\Rightarrow$ を示す。$a \models \exists x \alpha(x)$ より、Kの有限部分集合 $\{a_i' \mid i \in I\}$ と $\{u_i' \mid i \in I\}$ が存在して、$\bigcap_{i \in I} a_i' \leq a$ かつ $a_i' \models \alpha(u_i')$ となっている。定義 2.1 (4)(7) により、各 a_i' に対し、$a_i'' \geq a_i' \cap \infty(\cap a_i')$, $U(a_i'') \supset U(a)$ かつ $\bigcap_{i \in I} a_i'' \leq a$ となる $\{a_i''\}(\subset K)$ が存在する。ここで $a_i' \models \alpha(u_i')$ となる u_i' が存在するので、定義 2.7 (2) により、

$a_i \geq a_i' \cap \infty(\cap a_i')$, $a_i \models \alpha(u_i)$, $U(a_i) \supset U(a_i'')$ かつ

$a_i \cap \infty(a_i'') \leq a_i''$ となる $a_i \in K$, $u_i \in U(a_i)$ が存在する。$a_i \cap \infty(a_i'') \leq a_i'' \in K$ と定義 2.1 (4) より、$a_i \cap b_i \leq a_i''$, かつ $b_i \geq \infty(a_i'')$ となる $b_i \in K$ が存在する。

$A = \{a_i \mid i \in I\} \cup \{b_i \mid i \in I\}$ とすれば、$\cap A = \bigcap_{i \in I}(a_i \cap b_i) \leq \bigcap_{i \in I} a_i'' \leq a$, $U(a_i) \supset U(a)$, $U(b_i) \supset U(a)$, $a_i \models \alpha(u_i)$ かつ $\forall w \in U(b_i)\,(b_i \models \alpha(w))$ となっているので、十分である。 <u>証明終.</u>

この補題により、次の Soundness 定理が証明される。

定理 2.9 (Soundness 定理). $\Gamma \rightarrow \Delta$ が LJ で証明可能ならば $\Gamma \rightarrow \Delta$ はすべての normal model で正しい。

証明. 弱 Soundness 定理により、推論規則 $(\to\forall)$ と $(\exists\to)$ が正しいことを言えばよい。方法は弱 Soundness 定理の証明と同じである。

$(\to\forall)$. $\exists\langle M,\models\rangle\ \exists a\in K\ \forall\gamma\in\Gamma(a\models\gamma)$, $a\not\models\forall x\,\alpha(x)$ かつ $\forall x\,\alpha(x)\in\mathcal{L}(a)$. $a\not\models\forall x\,\alpha(x)$ と補題 2.8(1) により、$a\leq b$, $b\not\models\alpha(u)$ となる $b\in K$, $u\in U(b)$ が存在する。$a\leq b$ より $\forall\gamma\in\Gamma(b\models\gamma)$ なので $\Gamma\to\alpha(x)$ は正しくない。

$(\exists\to)$. $\exists\langle M,\models\rangle\ \exists a\in K\ a\models\exists x\,\alpha(x)$, $\forall\gamma\in\Gamma(a\models\gamma)$, $a\not\models\delta$ かつ $\delta\in\mathcal{L}(a)$。$a\models\exists x\,\alpha(x)$ と補題 2.8(2) により、$\exists\{a_i\mid i\in I\}\subset\subset K$, $\exists\{u_i\mid i\in I\}$ $\bigcap_{i\in I}a_i\leq a$, $U(a_i)\supset U(a)$ かつ $a_i\models\alpha(u_i)$。定義 2.1(3)(4) により、$\exists\{a_i'\mid i\in I\}\subset\subset K$ $a_i'\geq a_i$, $\bigcap_{i\in I}a_i'\leq a$ かつ $a_i'\geq a\wedge\infty(\cap a_i)$。$\cap a_i'\leq a$ と $a\not\models\delta$ より、$a_i'\not\models\delta$ となる i が存在する。そのような i を固定する。$a_i'\geq a\wedge\infty(\cap a_i)$ と $\forall j\,(U(a)\subset U(a_j))$ から $\forall\gamma\in\Gamma(a_i'\models\gamma)$ がでる。また $\delta\in\mathcal{L}(a_i')$ であるから、$\alpha(x),\Gamma\to\delta$ は正しくない。 証明終。

§3. 従来の Kripke model との関係と完全性定理.

この§では従来の Kripke frame $\langle K,U\rangle$ (Kは順序集合でUはKからある集合の集合への写像)が与えられたとき、それと同等な新しい Kripke frame Mが作れることをいう。

それを使って、新しいKripke modelの完全性定理がいえる。

従来のKripke frameを0-Kripke frame，新しいKripke frameを単に、Kripke frameと呼ぶことにする。0-Kripke frame $\langle K, U\rangle$ に対して、$\langle K, U\rangle$ の任意のvaluationで正しい論理式全体の集合を $L(K, U)$ とかく。また、Kripke frame M に対して、M の任意のnormal valuationで正しい論理式全体の集合を $L(M)$ とかく。$L(K, U)$ と $L(M)$ はどちらも、いわゆる論理（代入とmodus ponensとgeneralizationに関して閉じた論理式の集合, cf. [2]）になっている。$L(M)$ が論理になっていることの証明には補題2.4, 2.8を用いる。

0-Kripke frame $\langle K, U\rangle$ が与えられたものとする。K の部分集合 A が <u>open</u> であるとは、任意の $x, y \in K$ に対して、$x \in A$ で $y \leq x$ ならば $y \in A$ となっていることである。K のopen subset全体の集合を $O(K)$ とかく。$A, B \in O(K)$ のとき、A と B との共通部分 $A \cap B$ も $O(K)$ に入っている。また、∞ を任意の $A \in O(K)$ に対して K を対応させる（すなわち $\infty(A) = K$ ）写像とする。また、$A, B \in O(K)$ のとき、A と B との和集合 $A \cup B$ も $O(K)$ に入っているので、$A \cap B \subset C$ のとき $(A \cup C) \cap B \subset C$ となる。よって、$\langle O(K); \infty, \cap\rangle$ は ∞-distributive meet-semilatticeになる。任意の $x \in K$ に対して、$h(x) = \{y \in K \mid x \nleq y\}$ とする

と $h(x) \in \mathcal{O}(K)$ である。$K^* = \{h(x) \mid x \in K\} \cup \{K\}$ とおく。

補題3.1. $\{A_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{O}(K)$ かつ $B \in K^*$ かつ $\bigcap_{i \in I} A_i \subset B$ とする。このとき、ある $i \in I$ が存在して

$A_i \subset B$ である。

証明. $B = K$ のときは明らか。$B \neq K$ として、$B = \{x \in K \mid b \not\leq x\}$ とする。Bは b を含まない $\mathcal{O}(K)$ の元の中で最大のものである。$\bigcap A_i \subset \{x \in K \mid b \not\leq x\}$ より $b \notin \bigcap A_i$ である。よって、ある $i \in I$ があって $b \notin A_i$ となっている。ゆえに $A_i \subset B$ である。 証明終.

この補題により、K^* は $\langle \mathcal{O}(K); \Rightarrow, \cap \rangle$ の frame subset になっていることが簡単に分る。$U^* : K^* \longrightarrow \mathcal{P}(\bigcup_{x \in K} U(x))$ を $U^*(h(x)) = U(x)$ かつ $U^*(K) = \bigcup_{x \in K} U(x)$ と定義する。すると U^* は $\langle \mathcal{O}(K); \Rightarrow, \cap, K^* \rangle$ の universe function になっていることが示せる。$M = \langle \mathcal{O}(K); \Rightarrow, \cap, K^*, U^* \rangle$ とする。以下、この§の1つの目的は $L(K, U) = L(M)$ を示すことである。ここで、前§の Remark により、Mの valuation は常に normal であることを注意しておく。

補題3.2. Kripke frame Mの任意の valuation $\models$ に対して、

次が成立する。任意の $a \in K^*$ に対して、

$a \models \alpha \vee \beta \Longleftrightarrow (a \models \alpha$ 又は $a \models \beta)$ かつ $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$,

$a \models \exists x \alpha(x) \Longleftrightarrow \exists u \in U^*(a)\ (a \models \alpha(u))$.

<u>証明.</u> <u>$\vee$について</u>. $\Longleftarrow$ は明らか。$\Longrightarrow$ を示す。まず $a \models \alpha \vee \beta$ と補題2.3(1)により $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(a)$である。$a \models \alpha \vee \beta$ より、$b, c \in K^*$ が存在して、$b \wedge c \leq a$, $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$ である。補題3.1 により、$b \leq a$ 又は $c \leq a$ だから

$a \models \alpha$ 又は $a \models \beta$ となる。

<u>$\exists$について</u>. $\Longleftarrow$ は明らか。$\Longrightarrow$ を示す。$a \models \exists x \alpha(x)$ より、$\{a_i \mid i \in I\} \subset\subset K^*$ と $\{u_i \mid i \in I\}$ が存在して、

$\bigcap_{i \in I} a_i \leq a$ かつ $a_i \models \alpha(u_i)$ となっている。補題3.1 により、ある $i \in I$ があって $a_i \leq a$ なので、$u_i \in U^*(a)$ かつ $a \models \alpha(u_i)$ となっている。 <u>証明終.</u>

次の２つの補題は論理式の degree に関する帰納法で証明されるが、補題2.8(1)と補題3.2により 0-Kripke frame と Kripke frame の valuation の仕方が一致してしまうので、証明は明らかである。

補題3.3. 0-Kripke frame $\langle K, U \rangle$ の valuation $\models$ に対して、$\mathbb{M}$の valuation $\models^*$ を次のように定義する； 任意の

$\alpha \in AW(\mathcal{M})$，任意の $a \in K$ に対して、

$$h(a) \models^* \alpha \iff a \models \alpha,$$

また、$K \in K^*$ に対しては $K \models^* \alpha$。

このとき、$\models^*$ は定義2.2 (1) をみたし、任意の $\alpha \in W(\mathcal{M})$ について（$\models$, $\models^*$ をそれぞれの Kripke model の定義に従って論理式に拡張したとき） $h(a) \models^* \alpha \iff a \models \alpha$ が成立する。

補題3.4. Kripke frame $\mathcal{M}$ の valuation $\models$ に対して、$\langle K, U \rangle$ の valuation $\models^*$ を次のように定義する； 任意の $\alpha \in AW(\mathcal{M})$，任意の $a \in K$ に対して、

$$a \models^* \alpha \iff h(a) \models \alpha.$$

このとき、$\models^*$ は $\langle K, U \rangle$ の valuation の初期状態（$a \leq b$ かつ $a \models \alpha \Rightarrow b \models \alpha$ など）をみたし、任意の $\alpha \in W(\mathcal{M})$ について $a \models^* \alpha \iff h(a) \models \alpha$ が成立する。

この２つの補題により、次の定理が示せる。

定理3.5. $\mathcal{L}(K, U) = \mathcal{L}(\mathcal{M})$。

補題3.3 を使って新 Kripke frame の完全性定理を示す。

定理3.6. 次の3つは同値である。

(1) $\Gamma \to \Delta$ はLJで証明可能である。

(2) $\Gamma \to \Delta$ は任意のnormal Kripke modelで正しい。

(3) $\Gamma \to \Delta$ は任意の0-Kripke modelで正しい。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は定理2.9である。

(2) $\Rightarrow$ (3). ある0-Kripke modelで正しくなければ、補題3.3により、$\langle M, \models^* \rangle$ で正しくない。

(3) $\Rightarrow$ (1). Kripkeによる完全性定理で示されている。

証明終.

上の定理では、(1)と(2)の同値性を示すために、Kripkeによる完全性定理を用いている。その完全性定理の証明には、もちろんHenkin constructionが使われている。しかし、(1)と(2)の同値性を(3)を経ずに直接に証明することは簡単で、Introductionでも述べたように、Henkin constructionをしないで証明できる。

参考文献

[1] M. Fitting, Intuitionistic logic model theory and forcing, North-Holland, Amsterdam, 1969.

[2] H. Ono, A study of intermediate predicate logics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8 (1973), 619-649.

[3] 小野 & 古森, 順序半群によるセマンティクス, 数解研講究録 480, 130-141.

[4] H. Ono and Y. Komori, Logics without the contraction rule, to appear in J. Symbolic Logic, 50 (1985), 195-227.